ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

OPTION : PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. Ce sujet comporte 3 pages de texte.

I

1° - Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge

2° - Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère pour tout $r \geqslant 0$ les domaines :

$W_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant r,\ 0 \leqslant y \leqslant r\}$

et $\Delta_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$

et les intégrales doubles de la fonction $e^{-(x^2+y^2)}$ sur ces domaines :

$A(r) = \iint_{W_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$; $B(r) = \iint_{\Delta_r} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

Etablir les inégalités : $A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \leqslant B(r) \leqslant A(r)$

En déduire que $A(r)$ et $B(r)$ ont une limite commune quand $r \longrightarrow +\infty$ qu'on calculera en fonction de I.

3° - Calculer $B(r)$ en utilisant les coordonnées polaires et en déduire la valeur de I.

II

1° - Soit q un entier $\geqslant 2$ et α le complexe $\alpha = e^{\frac{i\pi}{q}}$. Calculer pour p entier, $1 \leqslant p \leqslant q-1$, les sommes :

$$S_p = \alpha^p + \alpha^{3p} + \alpha^{5p} + \ldots + \alpha^{(2q-1)p}$$

$$T_p = \alpha^p + 3\alpha^{3p} + 5\alpha^{5p} + \ldots + (2q-1)\,\alpha^{(2q-1)p}$$

2° - Pour $z = e^{i\theta}$, θ fixé dans l'intervalle $]0,2\pi[$, déterminer une primitive de la fonction de variable réelle $t \longmapsto \frac{1}{t-z}$ en l'écrivant sous la forme $H_1(t) + i\,H_2(t)$ où H_1 et H_2 sont deux fonctions réelles de t. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{1}{t-z}\right) dt$ a un sens et exprimer sa valeur en fonction de θ de la manière la plus simple possible.

3° - Soient p et q entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant q-1$.

a) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $\frac{t^{p-1}}{t^q + 1}$. Donner une primitive de cette fonction de la variable réelle t.

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{t^q + 1} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$.

4° - a) Déterminer l'ensemble E dans lequel la variable réelle x doit prendre ses valeurs pour que l'intégrale

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1}\, du$$

soit convergente. Donner la valeur de L(x) lorsque x est un rationnel de cet ensemble.

b) Pour tout réel $\delta > 0$ fixé, montrer qu'on peut trouver une constante $k(\delta) > 0$ telle qu'on ait à la fois :

$$\begin{cases} \left|\mathrm{Log}\ u\right| \leqslant k(\delta)\, u^{\delta} & \text{si } u \in [1, +\infty[\\ \left|\mathrm{Log}\ u\right| \leqslant k(\delta)\, u^{-\delta} & \text{si } u \in]0, 1] \end{cases}$$

En déduire que si a , b , x , y sont quatre réels de l'ensemble E qui vérifient : $a + \delta < x < y < b - \delta$, on peut écrire la relation :

$$\left|L(x) - L(y)\right| \leqslant k(\delta) \left|x - y\right| \left[L(a) + L(b)\right]$$

c) Montrer que la fonction L est continue sur E , et donner une expression simple de cette fonction à l'aide des fonctions élémentaires.

III

1° - Déterminer pour quelles valeurs de la variable réelle x , l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

est convergente. Etablir pour ces valeurs de x, l'égalité :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma(m+\frac{1}{2})$ pour $m \in \mathbb{N}$.

2° - Pour chaque valeur de x fixée dans $]0,1[$ on définit une fonction de deux variables : $h(u,v) = \left(\frac{v}{u}\right)^{2x-1} e^{-(u^2+v^2)}$ où (u,v) appartient au quart de plan $u > 0$, $v > 0$.
L'on envisage les intégrales de cette fonction :

$$F(a,b) = \iint_{U(a,b)} h(u,v)\, du\, dv \quad \text{pour} \quad 0 < a < b$$

$$G(r,\varphi) = \iint_{V(r,\varphi)} h(u,v)\, du\, dv \quad \text{pour} \quad 1 < r\,, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

pour lesquelles les domaines d'intégration U(a,b) et $V(r,\varphi)$ sont ainsi décrits :
- U(a,b) est le carré limité par les quatre droites (parallèles aux axes) $u = a$, $u = b$, $v = a$, $v = b$
- $V(r,\varphi)$ est le domaine bordé extérieurement par les deux cercles $u^2 + v^2 = r^2$ et $u^2 + v^2 = \frac{1}{r^2}$ et les droites $v = (\mathrm{tg}\,\varphi)u$, $v = \left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}\right)u$ (dans le quart de plan $u > 0$, $v > 0$).

a) Pour r et φ donnés (avec les inégalités $1 < r$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$) déterminer les valeurs (positives) de b et c pour lesquelles on a les inclusions

$$U\left(\frac{1}{r\sqrt{2}}, b\right) \subset V(r,\varphi) \subset U(c,r)$$

Quelles inégalités en résultent alors pour les intégrales $F\left(\frac{1}{r\sqrt{2}}, b\right)$, F(c,r) et $G(r,\varphi)$?

b) Montrer que pour tout $r > 0$, $\lim_{\varphi \to 0} G(r,\varphi) = g(r)$ existe, puis que $\lim_{r \to +\infty} g(r)$ existe, et exprimer cette dernière valeur en fonction de x au moyen de la fonction Γ définie au 1°) de cette section.

c) Calculer $G(r,\varphi)$ en utilisant les coordonnées polaires et les résultats de la section II . En déduire pour $x \in]0,1[$ la relation :

$$\Gamma(x)\ \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} .$$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail